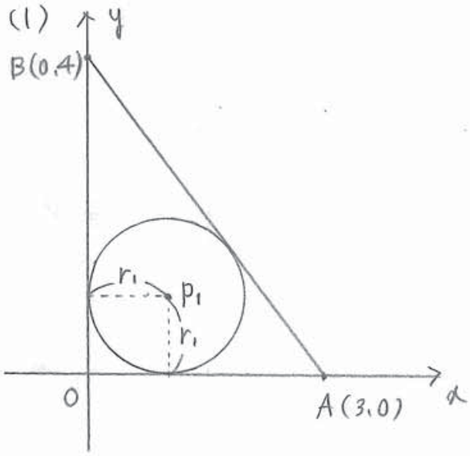
1. (1)



$OA=3$, $OB=4$, $AB=5$

$\triangle OAB$ の面積について

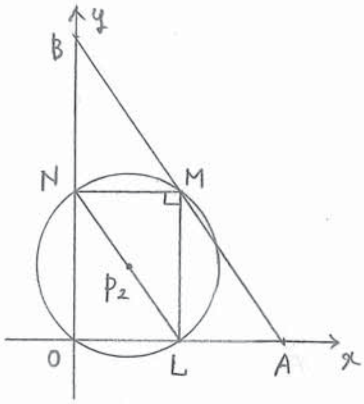
$$\frac{1}{2}r_1(3+4+5)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4$$

$\therefore\ r_1=1$

円 C_1 は、x軸, y軸に接するので、図より

$P_1(1, 1)$

(2)



中点連結定理より

$NM /\!/ OA$, $LM /\!/ OB$

また、$OA \perp OB$ より 四角形 OLMN は長方形となり $\angle LMN=90^\circ$

よって、LN は円 C_2 の直径となる

$$r_2=\frac{1}{2}LN=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB=\frac{5}{4}$$

ここで、$L\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $N(0, 2)$ より

$P_2\left(\frac{3}{4}, 1\right)$

(3) (1), (2) より

$$P_1P_2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

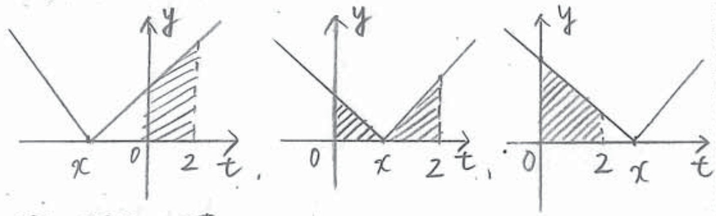
$$r_2-r_1=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$$

よって、$P_1P_2=r_2-r_1$ となるから

円 C_1 は円 C_2 に内接する。

2. (1)

(i) $x \leqq 0$ のとき　(ii) $0<x<2$ のとき　(iii) $x \geqq 2$ のとき



(i) $x \leqq 0$ のとき

$$f(x)=\int_0^2 (t-x)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2 - xt\right]_0^2$$
$$=-2x+2$$

(ii) $0<x<2$ のとき

$$f(x)=\int_0^x (-t+x)\,dt+\int_x^2 (t-x)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^2+xt\right]_0^x+\left[\frac{1}{2}t^2-xt\right]_x^2$$
$$=x^2-2x+2$$

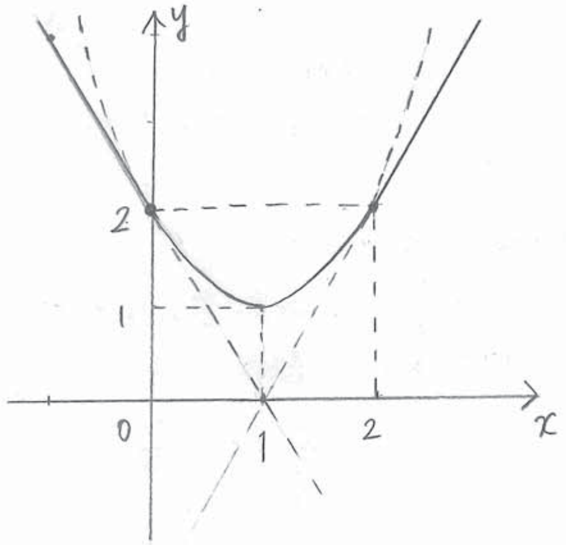
(iii) $x \geqq 2$ のとき

$$f(x)=\int_0^2 (-t+x)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^2+xt\right]_0^2$$
$$=2x-2$$

(i), (ii), (iii) より

$$f(x)=\begin{cases} -2x+2 & (x \leqq 0 \text{ のとき}) \\ x^2-2x+2 & (0<x<2 \text{ のとき}) \\ 2x-2 & (x \geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

よって $y=f(x)$ のグラフは下図の通り.



(2) (1) より $x \leqq 0$ のとき $f'(x)=-2$

$2 \leqq x$ のとき $f'(x)=2$ でいずれも不適

$0<x<2$ のとき $f'(x)=2x-2$

$f'(x)=1$ より $2x-2=1$

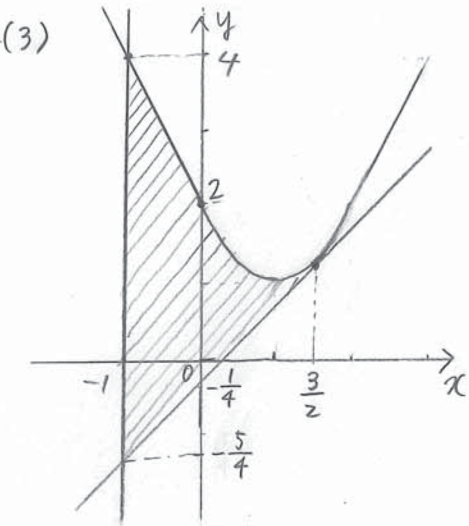
$x=\frac{3}{2}$ ($0<x<2$ をみたす)

よって接点の座標は $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$

したがって求める接線 l の方程式は

$$y-\frac{5}{4}=x-\frac{3}{2}$$
$$\therefore\ y=x-\frac{1}{4}$$

(3)



求める面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{4}+\frac{21}{4}\right)\times 1+\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x^2-2x+2-x+\frac{1}{4}\right)dx$$
$$=\frac{15}{4}+\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 dx$$
$$=\frac{15}{4}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{15}{4}+\frac{9}{8}$$
$$=\frac{39}{8}$$

[redacted]

3.

(1) 直線AB：$y-q=\dfrac{q-p}{p+q}(x-p)$

$$(p-q)x+(p+q)y=1$$

$p\neq q$ のとき

直線AD：$y-q=\dfrac{p+q}{p-q}(x-p)$

$$(p+q)x-(p-q)y=1 \quad \cdots ①$$

$p=q$ のとき

$p>0,\ q>0,\ p^2+q^2=1$ より

$p=q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

このとき $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $D\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ より

直線AD：$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって、①は $p=q$ のときも成り立つ

直線AB：$\underline{(p-q)x+(p+q)y=1}$

直線AD：$\underline{(p+q)x-(p-q)y=1}$

(2) 直線ABと $y=-x+1$ より

$(p-q)x+(p+q)(-x+1)=1$

$q>0$ より　$x=\dfrac{p+q-1}{2q}$

$y=-\dfrac{p+q-1}{2q}+1=\dfrac{-p+q+1}{2q}$

$\therefore\ \underline{r=\dfrac{p+q-1}{2q},\quad s=\dfrac{-p+q+1}{2q}}$

直線ADと $y=-x+1$ より

$(p+q)x-(p-q)(-x+1)=1$

$p>0$ より　$x=\dfrac{p-q+1}{2p}$

$y=-\dfrac{p-q+1}{2p}+1=\dfrac{p+q-1}{2p}$

$\therefore\ \underline{t=\dfrac{p-q+1}{2p},\quad u=\dfrac{p+q-1}{2p}}$

(3) $k=p+q$ より

$k^2=p^2+2pq+q^2$

$\quad=1+2pq$

$\therefore\ \underline{pq=\dfrac{k^2-1}{2}}$

p, q は t についての2次方程式

$t^2-kt+\dfrac{k^2-1}{2}=0 \cdots ②$ の解である

p, q は実数であるから、この方程式の判別式を D とすると、$D\geqq 0$ となればよい。

$D=k^2-4\cdot\dfrac{k^2-1}{2}$

$\quad=-k^2+2\geqq 0$

$\qquad k^2\leqq 2$

$k>0$ より、$k\leqq\sqrt{2}$

(4) $st-ru$

$=\dfrac{-(p-q)+1}{2q}\cdot\dfrac{(p-q)+1}{2p}-\dfrac{(p+q)-1}{2q}\cdot\dfrac{(p+q)-1}{2p}$

$=\dfrac{1-(p-q)^2-(p+q)^2+2(p+q)-1}{4pq}$

$=\dfrac{-(1-2pq)-(1+2pq)+2(p+q)}{4pq}$

$=\dfrac{p+q-1}{2pq}$

$=\dfrac{k-1}{k^2-1}$

$=\underline{\dfrac{1}{k+1}}$

$k>0$ と(3)より　$\dfrac{1}{k+1}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

等号成立は、$k=\sqrt{2}$，すなわち

②が重解をもつときであるから、

$p=q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。

よって、$st-ru$ の最小値は $\underline{\sqrt{2}-1}$

[redacted]