1

(1) 直線ACの方程式は $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$y = \frac{3\sin\theta}{\cos\theta}(x - \cos\theta) - \sin\theta$$

$y = 0$ とすると.

$x = \frac{4}{3}\cos\theta$ となる。

$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき.

$A(0, 2)$、$C(0, -1)$ より $P(0, 0)$.

よって $\theta = \frac{\pi}{2}$ のときも $x = \frac{4}{3}\cos\theta$ に

含まれるので $P\left(\frac{4}{3}\cos\theta, 0\right)$ となる。

(2)

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle ABP + \triangle CBP \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\cos\theta\right)\cdot 2\sin\theta \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\cos\theta\right)\cdot\sin\theta \\ &= 2(1 - \cos\theta)\sin\theta \end{aligned}$$

$\therefore S(\theta) = 2(1 - \cos\theta)\sin\theta$

(3)

$$\begin{aligned} S(\theta) &= 2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta \\ &= 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= 2\cos\theta - 2\cos 2\theta \\ &= 2\cos\theta - 2(2\cos^2\theta - 1) \\ &= -4\cos^2\theta + 2\cos\theta + 2 \\ &= -4(\cos\theta - 1)\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$S'(\theta) = 0$ とすると

$\cos\theta = 1, -\frac{1}{2}$

$0 < \theta < \pi$ より

$\theta = \frac{2}{3}\pi$

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	(π)
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	極大	↘	

よって $S(\theta)$ の最大値は

$$\begin{aligned} S\left(\frac{2}{3}\pi\right) &= 2\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$\therefore$ 最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\left(\theta = \frac{2}{3}\pi\right)$

[redacted]

$\boxed{2}$

(1) $P^{-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$$B=P^{-1}AP=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}&0\\0&2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

(2) $B=P^{-1}AP$のとき、$A^n=PB^nP^{-1}$ である。

また、一般に $\begin{pmatrix}x&0\\0&y\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}x^n&0\\0&y^n\end{pmatrix}$ が成り立つ。

したがって、

$$A^n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(2+\sqrt{3})^n&0\\0&(2-\sqrt{3})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^n+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^n&3(2+\sqrt{3})^n-3(2-\sqrt{3})^n\\(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n&\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^n+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^n\end{pmatrix}$$

より、

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\\\frac{1}{\sqrt{3}}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}\end{pmatrix}$$

である。

$$a_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$$
$$b_n=\frac{1}{\sqrt{3}}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}$$

(3) 二項定理より、a_nは、

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k2^{n-k}(\sqrt{3})^k+\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k2^{n-k}(-\sqrt{3})^k$$
$$=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k2^{n-k}\{(\sqrt{3})^k+(-\sqrt{3})^k\}$$

と表される。

mを0以上の整数とする。

一般に、

$k=2m$のとき $(\sqrt{3})^k+(-\sqrt{3})^k=2\cdot3^m$

$k=2m+1$のとき $(\sqrt{3})^k+(-\sqrt{3})^k=\sqrt{3}(3^m-3^m)$
$=0$

が成り立つ。

したがって

$0\leqq k\leqq n$を満たす整数kに対して、

$(\sqrt{3})^k+(-\sqrt{3})^k$, ${}_nC_k$, 2^{n-k}

は整数なので、a_nは整数。

(2)より、$(2+\sqrt{3})^n=a_n-(2-\sqrt{3})^n$である。

また、$0<2-\sqrt{3}<1$なので、$0<(2-\sqrt{3})^n<1$ より

$$a_n-1<a_n-(2-\sqrt{3})^n<a_n$$ である。

よって $[(2+\sqrt{3})^n]=[a_n-(2-\sqrt{3})^n]=a_n-1$

が成り立つ。

$$c_n=(2+\sqrt{3})^n-[(2+\sqrt{3})^n]$$
$$=(2+\sqrt{3})^n-a_n+1$$
$$=1-(2-\sqrt{3})^n$$

$|2-\sqrt{3}|<1$ より、

$$\lim_{n\to\infty}c_n=1$$

$\boxed{3}$

(1) $f(x) = \frac{x^2}{8} - 1 + \cos\frac{x}{2}$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{4}\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right) \geqq 0$$

よって，$x \geqq 0$ のとき $f'(x)$ は単調増加する．

$f'(0) = 0$ であるから，$x \geqq 0$ のとき $f'(x) \geqq 0$．

したがって，$x \geqq 0$ のとき $f(x)$ は単調増加する．

$f(0) = 0$ であるから，$x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$

すなわち $1 - \cos\frac{x}{2} \leqq \frac{x^2}{8}$

(2)
$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^2 xe^x\,dx \\
&= \int_0^2 x\cdot(e^x)'\,dx \\
&= \left[xe^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx \\
&= 2e^2 - \left[e^x\right]_0^2 \\
&= e^2 + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^2 x^n e^x\,dx \\
&= \int_0^2 x^n\cdot(e^x)'\,dx \\
&= \left[x^n e^x\right]_0^2 - n\int_0^2 x^{n-1}e^x\,dx \\
&= 2^n e^2 - nI_{n-1}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ I_n = 2^n e^2 - nI_{n-1}$$

(3) (2) より

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2^2e^2 - 2I_1 = 4e^2 - 2(e^2+1) \\
&= 2e^2 - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= 2^3e^2 - 3I_2 = 8e^2 - 3(2e^2-2) \\
&= 2e^2 + 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= 2^4e^2 - 4I_3 = 16e^2 - 4(2e^2+6) \\
&= 8e^2 - 24
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= 2^5e^2 - 5I_4 = 32e^2 - 5(8e^2-24) \\
&= -8e^2 + 120
\end{aligned}$$

(4) (1) より $x \geqq 0$ のとき

$$1 - \cos\frac{x}{2} \leqq \frac{x^2}{8}$$

両辺に $e^{\sqrt{x}} > 0$ をかけて

$$\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}} \leqq \frac{1}{8}x^2e^{\sqrt{x}}$$

$$\therefore\ \int_0^4 \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}\,dx \leqq \frac{1}{8}\int_0^4 x^2e^{\sqrt{x}}\,dx \quad \cdots ①$$

ここで，$\sqrt{x} = t$ すなわち $x = t^2$ とおくと

$\frac{dx}{dt} = 2t$，

x	$0 \to 4$
t	$0 \to 2$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \int_0^4 x^2e^{\sqrt{x}}\,dx &= \int_0^2 t^4e^t\cdot 2t\,dt \\
&= 2\int_0^2 t^5e^t\,dt \\
&= 2I_5 \\
&= 2(-8e^2+120) \\
&= -16e^2 + 240
\end{aligned}$$

これを ① の右辺に代入して

$$\int_0^4 \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}\,dx \leqq \frac{1}{8}(-16e^2+240)$$

$$\therefore\ \int_0^4 \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}\,dx \leqq -2e^2 + 30$$

$\boxed{4}$

(1) $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \Big[\log x\Big]_n^{n+1}$

$= \log(n+1) - \log n$ //

また、区間 $n \leqq x \leqq n+1$ において
$\dfrac{1}{n+1} \leqq \dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{n}$ が成立し、かつ等号は常には成立しないことに注意して
この辺々を $n \leqq x \leqq n+1$ で積分すると、

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{n}dx$$

$$\therefore \frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$ //

(2) ・(1)より、$\dfrac{1}{k+1} < \log(k+1) - \log k$.
両辺を $k=1$ から $k=n-1$ まで和をとると

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \log n$ となる。

この両辺に更に1を足して、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1+\log n \quad \cdots ①$$

・(1)より、$\log(k+1) - \log k < \dfrac{1}{k}$.
両辺を $k=1$ から $k=n$ まで和をとると、

$$\log(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \cdots ②$$

①、②より、$\displaystyle\log(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1+\log n$ //

(3) ①より、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 1+\log n$

よって、

$$e^{\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}} < e^{1+\log k} = e^1 \cdot e^{\log k} = e \cdot k$$

が成立する。

この両辺の逆数をとると、

$$\frac{1}{e^{\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}}} > \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{k}$$

この両辺を、$k=1$ から n まで和をとり、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e^{\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}}} > \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

更に、この右辺について、②より

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \log(n+1)$$

よって、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e^{\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}}} > \frac{1}{e}\cdot\log(n+1)$$ が成立

$$e^{\sum_{x=1}^{k}\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}$$

$= e^{\frac{1}{1}} \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots e^{\frac{1}{k}}$ なので、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{e \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdots e^{\frac{1}{k}}} > \frac{1}{e}\log(n+1)$$

が成立 //