$\boxed{1}$

(1) $x \geq 0$ のとき　$x^2+k>x$

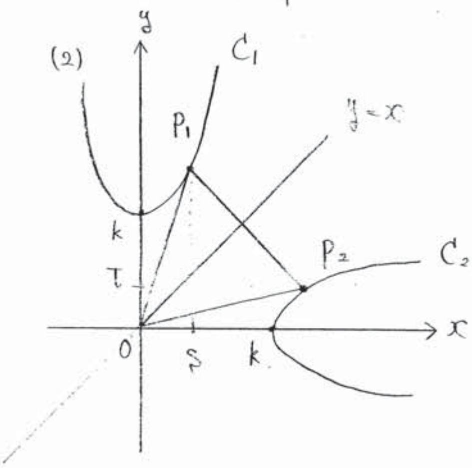
$$k>-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

右辺の最大値は $\frac{1}{4}$ なので　$k>\frac{1}{4}$

$x<0$ のとき　$k>-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$　∴ $k>\frac{1}{4}$

したがって　$k>\frac{1}{4}$

(2)



(a) $P_1(s,\ s^2+k)$ $P_2(t^2+k,\ t)$ より

$$A=\frac{1}{2}\left|st-(s^2+k)(t^2+k)\right|$$

(b) $y'=2x$ より P_1 における接線の傾きは $2s$

これが OP_2 の傾きに一致するとき，Aは最小となる．

OP_2 の傾きは　$2s=\frac{t}{t^2+k}$　∴ $s=\frac{t}{2(t^2+k)}$

したがって

$$B=\frac{1}{2}\left|\frac{t^2}{2(t^2+k)}-\left\{\frac{t^2}{4(t^2+k)^2}+k\right\}(t^2+k)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{t^2}{4(t^2+k)}-k(t^2+k)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{4}-\frac{k}{4(t^2+k)}-k(t^2+k)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|k(t^2+k)+\frac{k}{4(t^2+k)}-\frac{1}{4}\right|$$

$k>\frac{1}{4}$ であり，$k(t^2+k)>0$，$\frac{k}{4(t^2+k)}>0$ であるので

相加平均・相乗平均の大小関係から

$$k(t^2+k)+\frac{k}{4(t^2+k)}\geq 2\sqrt{\frac{k^2}{4}}=k>0$$

したがって　$B=\frac{1}{2}\left\{k(t^2+k)+\frac{k}{4(t^2+k)}-\frac{1}{4}\right\}$

(c) $u=t^2$ とおくと，$u\geq 0$

ここで　$f(u)=u+k+\frac{1}{4(u+k)}$ とおくと

$$f'(u)=\frac{1}{4(u+k)^2}(2u+2k-1)(2u+2k+1)$$

(i) $\frac{1}{4}<k\leq\frac{1}{2}$ のとき，$f'(u)=0$ となるのは $u=\frac{1}{2}-k$ のとき，

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}-k$	$\cdots$
$f'(u)$		$-$	0	$+$
$f(u)$		↘	1	↗

したがって　$u=\frac{1}{2}-k$ のとき，最小値 $f\left(\frac{1}{2}-k\right)=1$

ゆえに，Bの最小値は

$$B=\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{4}\right)$$

(ii) $k>\frac{1}{2}$ のとき，$f'(u)>0$

$y=f(u)$ は単調増加

したがって，$u=0$ のとき最小値 $f(0)=k+\frac{1}{4k}$

ゆえにBの最小値は

$$B=\frac{1}{2}k^2$$

(i)(ii)より

$$\begin{cases} \frac{1}{4}<k\leq\frac{1}{2} \text{ のとき，最小値 } B=\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{4}\right) \\ k>\frac{1}{2} \text{ のとき，最小値 } B=\frac{1}{2}k^2 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ $u(x) = x^2 + p\int_0^1 (1+tx)u(t)\,dt$ …①

(1) ①をみたす $u(x)$ が存在すれば，①の右辺を変形して

$$u(x) = x^2 + \left(p\int_0^1 tu(t)\,dt\right)x + p\int_0^1 u(t)\,dt$$

$\int_0^1 tu(t)\,dt$，$\int_0^1 u(t)\,dt$ は定数であるから，

$u(x)$ は 2次関数である．

(2) $\begin{cases} a = \int_0^1 tu(t)\,dt & \cdots ② \\ b = \int_0^1 u(t)\,dt & \cdots ③ \end{cases}$ とおくと，

(1) より，$u(x) = x^2 + pax + pb$ …④

②，④ より

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 t(t^2 + pat + pb)\,dt \\ &= \int_0^1 (t^3 + pat^2 + pbt)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{pa}{3}t^3 + \frac{pb}{2}t^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{pa}{3} + \frac{pb}{2} \end{aligned}$$

$\therefore\ (4p-12)a + 6pb = -3$ …⑤

③，④ より

$$\begin{aligned} b &= \int_0^1 (t^2 + pat + pb)\,dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{pa}{2}t^2 + pbt\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{pa}{2} + pb \end{aligned}$$

$\therefore\ 3pa + (6p-6)b = -2$ …⑥

⑤，⑥ より

$$\begin{pmatrix} 4p-12 & 6p \\ 3p & 6p-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix} 4p-12 & 6p \\ 3p & 6p-6 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \cdots ⑦$$

よって，行列 P が逆行列をもつとすると，

⑦をみたす a，b が存在する，すなわち

①をみたす $u(x)$ が存在する．

したがって，①をみたす $u(x)$ が存在しないとき，

行列 P は逆行列をもたないから，行列 P について

$$\Delta(P) = (4p-12)(6p-6) - 6p\cdot 3p = 0$$

$$p^2 - 16p + 12 = 0$$

$$\therefore\ p = 8 \pm 2\sqrt{13}$$

$\boxed{3}$

(1) ケーリー・ハミルトンの定理より

$A^2-(a+c)A+(ac+b^2)E=O$

よって, $A^2=(a+c)A-(ac+b^2)E$ …①

また, $A^2-A+E=O$ より $A^2=A-E$ …②

①, ②より

$(a+c)A-(ac+b^2)E=A-E$

$(a+c-1)A=(ac+b^2-1)E$

$b>0$ より A は E の実数倍にはならないので

$a+c-1=0$ …③ $ac+b^2-1=0$ …④

③より $c=1-a$ これを④に代入して

$a(1-a)+b^2-1=0$ ∴ $b^2=a^2-a+1$

$b>0$ より $b=\sqrt{a^2-a+1}$

ゆえに, $\underline{b=\sqrt{a^2-a+1},\ c=1-a}$ //

(2) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\b+c\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\b-c\end{pmatrix}$

これら2つのベクトルが垂直であるから

$(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)=0$

$a^2-c^2=0$

(1)より $a^2-(1-a)^2=0$

よって, $a=\dfrac{1}{2}$ (1)より $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $c=\dfrac{1}{2}$

ゆえに, 求める行列 A は $\underline{A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}}$ //

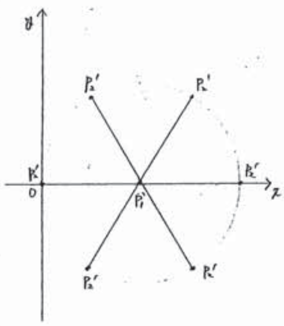
(3) $A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$ より A は原点を中心とする $\dfrac{\pi}{3}$ の回転移動である。

よって, ベクトル $P_n=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と点 $P_n'(x, y)$ は1対1対応しているので,

$P_{n+1}=P_n+A^{m_n}(P_n-P_{n-1})$ は

「点 P_n' をベクトル P_n-P_{n-1} と $\dfrac{m_n\pi}{3}$ $(m_n=1, 2, \cdots, 6)$ の角をなす方向に距離1だけ移動したものが点 P_{n+1}'」

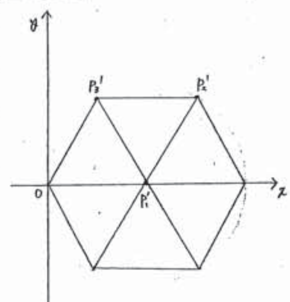
という意味である。



$P_3=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ となるのは

$P_1'\to P_2'\to P_1'$ と移動するときで 全部で6通り

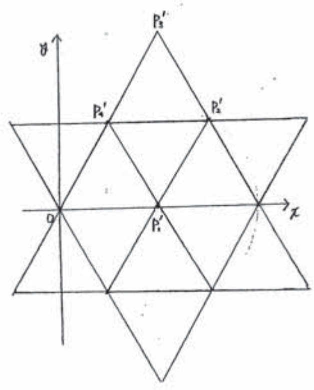
よって, $q_1=\dfrac{6}{6^2}=\underline{\dfrac{1}{6}}$ //



$P_4=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ となるのは

移動の経路が1辺の長さが1の正三角形をえがくときで, 全部で12通り

よって, $q_2=\dfrac{12}{6^3}=\underline{\dfrac{1}{18}}$ //



$P_5=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ となるのは

移動の経路が1辺の長さが1のひし形をえがくときで, 全部で24通り

よって, $q_3=\dfrac{24}{6^4}=\underline{\dfrac{1}{54}}$ //