1

(1). $I=\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$, $J=\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

$I=[e^x\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

$=e^{\pi}\cdot(-1)-e^0\cdot 1+J$

$I-J=-e^{\pi}-1$ …①

$J=[e^x\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x\cos x\,dx$

$=-I$

$I+J=0$ …②

①, ② より

$I=-\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$, $J=\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$ //

(2). $\int_0^{\pi}(a\cos x+b\sin x)^2dx=1$ より

$\int_0^{\pi}(a^2\cos^2x+2ab\sin x\cos x+b^2\sin^2x)dx=1$

$\int_0^{\pi}\left(a^2\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}+ab\sin 2x+b^2\cdot\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=1$

$\int_0^{\pi}\left(\dfrac{a^2+b^2}{2}+\dfrac{a^2-b^2}{2}\cos 2x+ab\sin 2x\right)dx=1$

$\left[\dfrac{a^2+b^2}{2}x+\dfrac{a^2-b^2}{4}\sin 2x-\dfrac{ab}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}=1$

$\dfrac{a^2+b^2}{2}\pi-\dfrac{ab}{2}-\left(-\dfrac{ab}{2}\right)=1$

$a^2+b^2=\dfrac{2}{\pi}$ …③

$\int_0^{\pi}(e^x-a\cos x-b\sin x)^2dx$

$=\int_0^{\pi}\{e^x-(a\cos x+b\sin x)\}^2dx$

$=\int_0^{\pi}\{e^{2x}-2e^x(a\cos x+b\sin x)+(a\cos x+b\sin x)^2\}dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\pi}-2aI-2bJ+1$

$=\dfrac{1}{2}(e^{2\pi}-1)-2a\left(-\dfrac{e^{\pi}+1}{2}\right)-2b\cdot\dfrac{e^{\pi}+1}{2}+1$

$=(e^{\pi}+1)(a-b)+\dfrac{1}{2}(e^{2\pi}+1)$

$e^{\pi}+1>0$ より、この式の値が最大となるのは

$a-b$ が最大となるとき

$a-b=k$ とおくと、

$b=a-k$

これを ③ に代入して、

$a^2+(a-k)^2=\dfrac{2}{\pi}$

$2a^2-2ka+k^2-\dfrac{2}{\pi}=0$

a は実数より、判別式を D とすると

$D/4=k^2-2\cdot\left(k^2-\dfrac{2}{\pi}\right)\geqq 0$

$-k^2+\dfrac{4}{\pi}\geqq 0$

$k^2-\dfrac{4}{\pi}\leqq 0$

$\left(k+\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\left(k-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\right)\leqq 0$

$-\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\leqq k\leqq\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$

よって、k の最大値は $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ であるから、

求める最大値は

$\dfrac{2\sqrt{\pi}}{\pi}(e^{\pi}+1)+\dfrac{1}{2}(e^{2\pi}+1)$ //

$\boxed{2}$

(1) 人間・経 $\boxed{2}$(1) と同じ

(2) $||x^2-2x-3|-a|=2$

$|x^2-2x-3|-a=\pm 2$

$|x^2-2x-3|=a\pm 2$

この方程式の実数解の個数は、

$y=|x^2-2x-3|$ と $y=a\pm 2$ の共有点の

個数と等しい。よって、(1)のグラフより

$a+2<0 \Leftrightarrow a<-2$ のとき、0個

$a+2=0 \Leftrightarrow a=-2$ のとき 2個

$a-2<0<a+2<4 \Leftrightarrow -2<a<2$ のとき 4個

$a-2=0,\ a+2=4 \Leftrightarrow a=2$ のとき 5個

$0<a-2<4<a+2 \Leftrightarrow 2<a<6$ のとき 6個

$a-2=4 \Leftrightarrow a=6$ のとき 5個

$a-2>4 \Leftrightarrow a>6$ のとき 4個

以上より

$a<-2$ のとき 0個

$a=-2$ のとき 2個

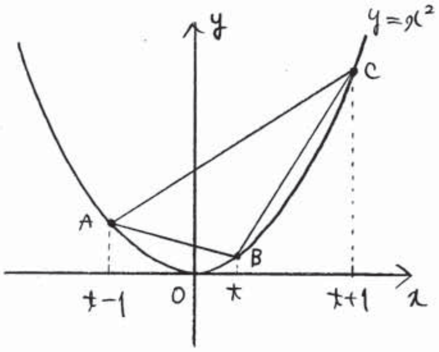
$-2<a<2,\ a>6$ のとき 4個

$a=2, 6$ のとき 5個

$2<a<6$ のとき 6個 //

3

(1)



△ABCの外心は、線分AB, BCの垂直二等分線の交点である。

直線ABの傾きは、

$$\frac{t^2-(t-1)^2}{t-(t-1)}=2t-1$$

線分ABの中点は $\left(\frac{2t-1}{2}, \frac{2t^2-2t+1}{2}\right)$

よって、$t \neq \frac{1}{2}$ のとき、線分ABの垂直二等分線は

$$y=-\frac{1}{2t-1}\left(x-\frac{2t-1}{2}\right)+\frac{2t^2-2t+1}{2}$$

$$=-\frac{1}{2t-1}x+t^2-t+1 \quad \cdots ①$$

また、直線BCの傾きは $2t+1$.

線分BCの中点は $\left(\frac{2t+1}{2}, \frac{2t^2+2t+1}{2}\right)$

よって、$t \neq -\frac{1}{2}$ のとき、線分BCの垂直二等分線は

$$y=-\frac{1}{2t+1}x+t^2+t+1 \quad \cdots ②$$

①、② より、$t \neq \pm\frac{1}{2}$ のとき、外心の x 座標は

$$-\frac{1}{2t-1}x+t^2-t+1=-\frac{1}{2t+1}x+t^2+t+1$$

$$\left(\frac{1}{2t+1}-\frac{1}{2t-1}\right)x=2t$$

$$\frac{-2}{(2t+1)(2t-1)}x=2t$$

$$\therefore\ x=-t(2t+1)(2t-1) \quad \cdots ③$$

また、$t=\frac{1}{2}$ のとき、$A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ より

線分ABの垂直二等分線は $x=0$ となるから、

外心の x 座標は 0

同様に、$t=-\frac{1}{2}$ のとき、$B\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ より

外心の x 座標は 0

よって、③ は、$t=\pm\frac{1}{2}$ のときも成り立つ。

$$\therefore\ p(t)=-t(2t+1)(2t-1)$$

(2) $p(t)=-4t^3+t$

$p'(t)=-12t^2+1$

$=-(2\sqrt{3}t+1)(2\sqrt{3}t-1)$

$p'(t)=0$ のとき、$t=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$

増減表は

t	$\cdots$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\cdots$
$p'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$p(t)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{9}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	↘

$\therefore$ 極大値 $\frac{\sqrt{3}}{9}$ $\left(t=\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

極小値 $-\frac{\sqrt{3}}{9}$ $\left(t=-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$