$\boxed{1}$

(1) $f(x)=x^3+x^2+7x+3$

$f'(x)=3x^2+2x+7=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{20}{3}>0$ より

$f(x)$は単調に増加する。

また、$f(-2)=-15<0$, $f(0)=3>0$ である。

$f(x)$は区間$[-2,0]$で連続であり、単調に増加し、

$f(-2)f(0)<0$ である。

中間値の定理より、

$f(x)=0$ は解αを区間$(-2,0)$にただ1つもつ。

(2) $g(x)=\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+1}=\dfrac{x(x^2+1)-4x+2}{x^2+1}=x-\dfrac{4x-2}{x^2+1}$

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{g(x)-x\}=\lim_{x\to\pm\infty}\left\{-\frac{4-\frac{2}{x}}{x+\frac{1}{x}}\right\}=0$ より

求める漸近線は $y=x$ である。

(3) $g'(x)=\dfrac{(3x^2-3)(x^2+1)-(x^3-3x+2)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{(x-1)(x^3+x^2+7x+3)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{x-1}{(x^2+1)^2}\cdot f(x)$

(1)より、$f(x)$は、$\begin{cases} f(x)>0 & (\alpha<x) \\ f(x)=0 & (x=\alpha) \\ f(x)<0 & (x<\alpha) \end{cases}$ である。

また、$-2<\alpha<0<1$ である。

よって、$g'(x)\geqq 0$ の解は、$x\leqq\alpha$, $1\leqq x$ なので

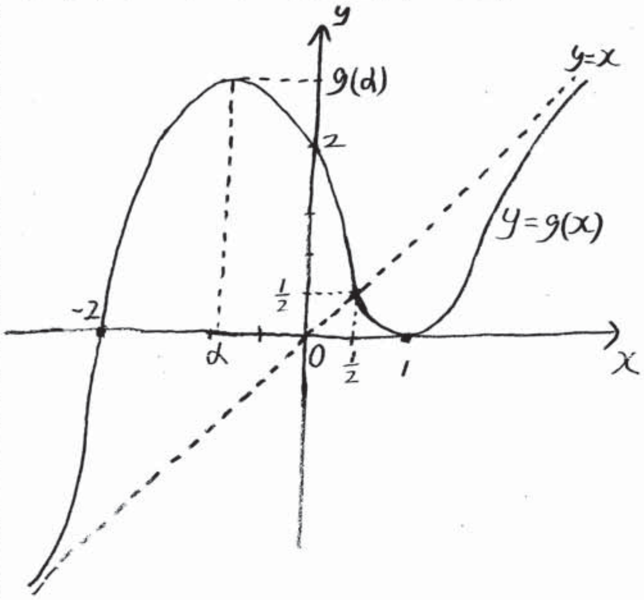
$g(x)$の増減表は、

x	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

となる。

(2)より、$y=g(x)$の漸近線は $y=x$ であることを考慮すると、

$y=g(x)$ のグラフは、次のようになる。



$\boxed{2}$ $u(x) = x^2 + p\int_0^1 (1+tx)\,u(t)\,dt$ …①

(1) ①の右辺を変形して

$$u(x) = x^2 + \left(p\int_0^1 t\,u(t)\,dt\right)x + p\int_0^1 u(t)\,dt$$

$\int_0^1 t\,u(t)\,dt$, $\int_0^1 u(t)\,dt$ は定数であるから,

$u(x)$ は 2次関数である.

(2) $\begin{cases} a = \int_0^1 t\,u(t)\,dt & \cdots ② \\ b = \int_0^1 u(t)\,dt & \cdots ③ \end{cases}$ とおくと,

(1)より, $u(x) = x^2 + pax + pb$ …④

②, ④より

$$a = \int_0^1 t(t^2 + pat + pb)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^3 + pat^2 + pbt)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{pa}{3}t^3 + \frac{pb}{2}t^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{pa}{3} + \frac{pb}{2}$$

$\therefore$ $(4p-12)a + 6pb = -3$ …⑤

③, ④より

$$b = \int_0^1 (t^2 + pat + pb)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{pa}{2}t^2 + pbt\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{pa}{2} + pb$$

$\therefore$ $3pa + (6p-6)b = -2$ …⑥

⑤, ⑥より

$$\begin{pmatrix} 4p-12 & 6p \\ 3p & 6p-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix} 4p-12 & 6p \\ 3p & 6p-6 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \cdots ⑦$$

よって, ①をみたす $u(x)$ が存在するとき,

⑦をみたす a, b が存在するから,

行列 P について

$$\Delta(P) = (4p-12)(6p-6) - 6p\cdot 3p \neq 0$$

$$p^2 - 16p + 12 \neq 0$$

$\therefore$ $p \neq 8+2\sqrt{13}$ かつ $p \neq 8-2\sqrt{13}$

$\boxed{3}$

(1) ケーリー・ハミルトンの定理より

$A^2-(a+c)A+(ac+b^2)E=O$

よって，$A^2=(a+c)A-(ac+b^2)E$ …①

また，$A^2-A+E=O$ より $A^2=A-E$ …②

①，②より

$(a+c)A-(ac+b^2)E=A-E$

$(a+c-1)A=(ac+b^2-1)E$

$b>0$ より AはEの実数倍にはならないので

$a+c-1=0$ …③　$ac+b^2-1=0$ …④

③より $c=1-a$　これを④に代入して

$a(1-a)+b^2-1=0$　$\therefore b^2=a^2-a+1$

$b>0$ より $b=\sqrt{a^2-a+1}$

ゆえに，$b=\sqrt{a^2-a+1}$，$c=1-a$

(2) $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\b+c\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\b&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\b-c\end{pmatrix}$

これら2つのベクトルが垂直であるから

$(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)=0$

$a^2-c^2=0$

(1)より　$a^2-(1-a)^2=0$

よって，$a=\frac{1}{2}$　(1)より $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$c=\frac{1}{2}$

ゆえに，求める行列Aは　$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}&-\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3}&\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$ より Aは原点を中心とする$\frac{\pi}{3}$の回転移動である。

よって，ベクトル $P_n=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と点 $P_n'(x,y)$ は1対1対応しているので，

$P_2=P_1+A^l(P_1-P_0)$ は

「点P_1'をベクトルP_1-P_0と$\frac{l\pi}{3}$

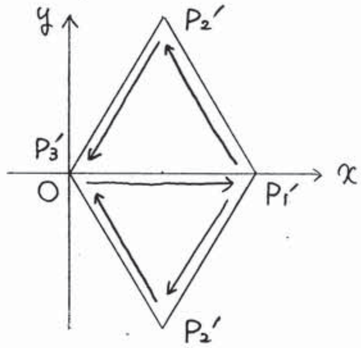
($l=1,2,\cdots,6$)の角をなす方向に　…(*)

距離1だけ移動したものが点P_2'」

という意味である。

$P_3=P_2+A^m(P_2-P_1)$ は

上の(*)の文においてP_0をP_1に，P_1をP_2に，P_1'をP_2'に，P_2'をP_3'に，lをmに変えればよい。



$P_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ となるのは移動の経路が上の図のような正三角形をえがくときで，

全部で2通り

ゆえに，求める確率は　$\frac{2}{6^2}=\frac{1}{18}$